Prof. Dr. Alfred Toth

Funktionen in der polykontexturalen Semiotik

1. In Toth (2019a) hatten wir argumentiert, daß die Definition der drittheitlichen Trichotomie überflüssig und zudem inkonsistent ist, weil sie erstens die logische Subjektposition repräsentiert, aber von Peirce, Bense und Walther (1979) topologisch und logisch definiert wird. Zweitens weil der Zusammenhang von Zeichen ein Problem einer Zeichensyntax ist, aber keine Eigenschaft des Zeichens selbst (vgl. Klaus 1962). Bense selbst hatte das Zeichen wiederholt rein mathematisch definiert, so etwa kategorietheoretisch in (1979, S. 53 u. 67) oder zahlentheoretisch in (1981, S. 17 ff.). Drittens lassen sich die ersten zwei Trichotomien durch

(x.1): $Z = f(\Omega)$

(x.2): $Z = f(\omega, t)$

(x.3): $Z \neq f(\Omega)$

mit $x \in (1, 2)$ definieren, was jedoch für die dritte Trichotomie nicht möglich ist, da der Zusammenhang von Zeichen keine Funktion des Objektes, sondern eine solche einer Menge von Zeichen ist

$Z = f((Z))$.

Für den Trivialfall, daß die Menge aus dem Zeichen selbst besteht, gilt dann natürlich

$Z = f(Z)$.

Es genügt also völlig, von der semiotischen 2×3-Teilmatrix

	.1	.2	.3
1.	1.1	1.2	1.3
2.	2.1	2.2	2.3

auszugehen und jedes Subzeichen der Form

$S = (x.y)$

mit $x \in (1, 2)$ und $y \in (1, 2, 3)$

durch

$(x.1) = f(\Omega)$

$(x.2) = f(\omega, t)$

$(x.3) \neq f(\Omega)$

zu definieren. Ein offener Konnex kann dann definiert werden durch

$(x.y)$,

ein abgeschlossener Konnex durch

$(x.y]$ oder $[x.y)$

und ein vollständiger Konnex durch

$[x.y]$.

2. Bekanntlich wurde die auf der 3×3-Matrix definierte triadisch-trichotomische Zeichenrelation Benses (vgl. Bense 1975, S. 37) als eine „verschachtelte Relation" bzw. als eine „Relation über Relationen" durch Bense (1979, S. 53 u. 67) wie folgt eingeführt

$Z^{3,3} = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$,

d.h. jede Teilrelation der Stufe $n = 1$ ist in den Teilrelationen der Stufen $n > 1$ eingebettet.

Gehen wir also aus von

$Z^{2,3} = ((w.x), (y.z))$

und setzen $(w.x) = A$ und $(y.z) = B$,

dann können wir auch die dyadisch-trichotomische Zeichenrelation als Relation über Relationen darstellen, und zwar auf 6-fache Weise

$Z^{2,3} = (A, B) = ((w.x), (y.z))$ keine Einbettung

$Z^{2,3} = ((A), B) = (((w.x)), (y.z))$ nur A links eingebettet

$Z^{2,3} = ((B), A) = (((y.z)), (w.x))$ nur B links eingebettet

$Z^{2,3} = (B, (A)) = ((y.z), ((w.x)))$ nur A rechts eingebettet

$Z^{2,3} = (A, (B)) = ((w.x), ((y.z)))$ nur B rechts eingebettet

$Z^{2,3}$ = ((A, B)) = (((w.x), (y.z))) A und B eingebettet

Damit haben wir außerdem eine Isomorphie zwischen der in Toth (2015) ebenfalls auf 6-fache Weise darstellbaren Logik L* und $Z^{2,3}$ gefunden. Will man nämlich die Reflexionsidentität der klassischen 2-wertigen aristotelischen Logik

L = (0, 1)

aufheben, ohne das Gesetz des Tertium non datur zu verletzen, so kann man dies durch Einführung eines Einbettungsoperators E mit

E: x → (x)

tun. Dadurch erhält man folgende Abbildung

L → L* = ((0, 1), ((0), 1), ((1), 0), (0, (1)), (1, (0)), ((0, 1))),

und damit

$Z^{2,3}$ ≌ L*.

Die 36 möglichen dyadisch-trichotomischen semiotischen Relationen

(1.1, 2.1)	(1.1, 2.1]	[1.1, 2.1)	[1.1, 2.1]
(1.1, 2.2)	(1.1, 2.2]	[1.1, 2.2)	[1.1, 2.2]
(1.1, 2.3)	(1.1, 2.3]	[1.1, 2.3)	[1.1, 2.3]
(1.2, 2.1)	(1.2, 2.1]	[1.2, 2.1)	[1.2, 2.1]
(1.2, 2.2)	(1.2, 2.2]	[1.2, 2.2)	[1.2, 2.2]
(1.2, 2.3)	(1.2, 2.3]	[1.2, 2.3)	[1.2, 2.3]
(1.3, 2.1)	(1.3, 2.1]	[1.3, 2.1)	[1.3, 2.1]
(1.3, 2.2)	(1.3, 2.2]	[1.3, 2.2)	[1.3, 2.2]
(1.3, 2.3)	(1.3, 2.3]	[1.3, 2.3)	[1.3, 2.3]

müssen somit je 6-fach ausdifferenziert werden. Dadurch erhält man also 6 mal 36 = 216 durch E differenzierbare topologische semiotische Relationen

(1.1, 2.1)	((1.1), 2.1)	(1.1, (2.1))	((2.1), 1.1)	(2.1, (1.1))	((2.1, 1.1))
(1.1, 2.1]	((1.1), 2.1]	(1.1, (2.1)]	((2.1), 1.1]	(2.1, (1.1)]	((1.1, 2.1)]

[1.1, 2.1)	[(1.1), 2.1)	[1.1, (2.1))	[(2.1), 1.1)	[2.1, (1.1))	[(1.1, 2.1))
[1.1, 2.1]	[(1.1), 2.1]	[1.1, (2.1)]	[(2.1), 1.1]	[2.1, (1.1)]	[(1.1, 2.1)]
(1.1, 2.2)	((1.1), 2.2)	(1.1, (2.2))	((2.2), 1.1)	(2.2, (1.1))	((1.1, 2.2))
(1.1, 2.2]	((1.1), 2.2]	(1.1, (2.2)]	((2.2), 1.1]	(2.2, (1.1)]	((1.1, 2.2)]
[1.1, 2.2)	[(1.1), 2.2)	[1.1, (2.2))	[(2.2), 1.1)	[2.2, (1.1))	[(1.1, 2.2))
[1.1, 2.2]	[(1.1), 2.2]	[1.1, (2.2)]	[(2.2), 1.1]	[2.2, (1.1)]	[(1.1, 2.2)]
(1.1, 2.3)	((1.1), 2.3)	(1.1, (2.3))	((2.3), 1.1)	(2.3, (1.1))	((1.1, 2.3))
(1.1, 2.3]	((1.1), 2.3]	(1.1, (2.3)]	((2.3), 1.1]	(2.3, (1.1)]	((1.1, 2.3)]
[1.1, 2.3)	[(1.1), 2.3)	[1.1, (2.3))	[(2.3), 1.1)	[2.3, (1.1))	[(1.1, 2.3))
[1.1, 2.3]	[(1.1), 2.3]	[1.1, (2.3)]	[(2.3), 1.1]	[2.3, (1.1)]	[(1.1, 2.3)]
(1.2, 2.1)	((1.2), 2.1)	(1.2, (2.1))	((2.1), 1.2)	(2.1, (1.2))	((1.2, 2.1))
(1.2, 2.1]	((1.2), 2.1]	(1.2, (2.1)]	((2.1), 1.2]	(2.1, (1.2)]	((1.2, 2.1)]
[1.2, 2.1)	[(1.2), 2.1)	[1.2, (2.1))	[(2.1), 1.2)	[2.1, (1.2))	[(1.2, 2.1))
[1.2, 2.1]	[(1.2), 2.1]	[1.2, (2.1)]	[(2.1), 1.2]	[2.1, (1.2)]	[(1.2, 2.1)]
(1.2, 2.2)	((1.2), 2.2)	(1.2, (2.2))	((2.2), 1.2)	(2.2, (1.2))	((1.2, 2.2))
(1.2, 2.2]	((1.2), 2.2]	(1.2, (2.2)]	((1.2), 2.2]	(1.2, (2.2)]	((1.2, 2.2)]
[1.2, 2.2)	[(1.2), 2.2)	[1.2, (2.2))	[(2.2), 1.2)	[2.2, (1.2))	[(1.2, 2.2))
[1.2, 2.2]	[(1.2), 2.2]	[1.2, (2.2)]	[(2.2), 1.2]	[2.2, (1.2)]	[(1.2, 2.2)]
(1.2, 2.3)	((1.2), 2.3)	(1.2, (2.3))	((2.3), 1.2)	(2.3, (1.2))	((1.2, 2.3))
(1.2, 2.3]	((1.2), 2.3]	(1.2, (2.3)]	((2.3), 1.2]	(2.3, (1.2)]	((1.2, 2.3)]
[1.2, 2.3)	[(1.2), 2.3)	[1.2, (2.3))	[(2.3), 1.2)	[2.3, (1.2))	[(1.2, 2.3))
[1.2, 2.3]	[(1.2), 2.3]	[1.2, (2.3)]	[(2.3), 1.2]	[2.3, (1.2)]	[(1.2, 2.3)]
(1.3, 2.1)	((1.3), 2.1)	(1.3, (2.1))	((2.1), 1.3)	(2.1, (1.3))	((1.3, 2.1))
(1.3, 2.1]	((1.3), 2.1]	(1.3, (2.1)]	((2.1), 1.3]	(2.1, (1.3)]	((1.3, 2.1)]
[1.3, 2.1)	[(1.3), 2.1)	[1.3, (2.1))	[(2.1), 1.3)	[2.1, (1.3))	[(1.3, 2.1))

[1.3, 2.1]	[(1.3), 2.1]	[1.3, (2.1)]	[(2.1), 1.3]	[2.1, (1.3)]	[(1.3, 2.1)]
(1.3, 2.2)	((1.3), 2.2)	(1.3, (2.2))	((2.2), 1.3)	(2.2, (1.3))	((1.3, 2.2))
(1.3, 2.2]	((1.3), 2.2]	(1.3, (2.2)]	((2.2), 1.3]	(2.2, (1.3)]	((1.3, 2.2)]
[1.3, 2.2)	[(1.3), 2.2)	[1.3, (2.2))	[(2.2), 1.3)	[2.2, (1.3))	[(1.3, 2.2))
[1.3, 2.2]	[(1.3), 2.2]	[1.3, (2.2)]	[(2.2), 1.3]	[2.2, (1.3)]	[(1.3, 2.2)]
(1.3, 2.3)	((1.3), 2.3)	(1.3, (2.3))	((2.3), 1.3)	(2.3, (1.3))	((1.3, 2.3))
(1.3, 2.3]	((1.3), 2.3]	(1.3, (2.3)]	((2.3), 1.3]	(2.3, (1.3)]	((1.3, 2.3)]
[1.3, 2.3)	[(1.3), 2.3)	[1.3, (2.3))	[(2.3), 1.3)	[2.3, (1.3))	[(1.3, 2.3))
[1.3, 2.3]	[(1.3), 2.3]	[1.3, (2.3)]	[(2.3), 1.3]	[2.3, (1.3)]	[(1.3, 2.3)].

Ferner enthält die bensesche 3 × 3-Matrix bekanntlich in den Zeilen die Triaden und in den Spalten die Trichotomien

	.1	.2	.3
1.	1.1	1.2	1.3
2.	2.1	2.2	2.3
3.	3.1	3.2	3.3.

Da es sich hier um eine quadratische Matrix handelt, ist natürlich n = m.

Dagegen ist die in Toth (2019b) eingeführte dyadisch-trichotomische Matrix eine 2 × 3-Matrix, bei der also n ≠ m gilt

	.1	.2	.3
1.	1.1	1.2	1.3
2.	2.1	2.2	2.3.

Während also die bensesche Zeichenrelation durch

$Z^{3,3} = (3.x, 2.y, 1.z)$

mit x, y, z ∈ (1, 2, 3) definiert ist, ist unsere Zeichenrelation durch

$Z^{2,3} = ((w.x), (y.z))$

mit w, y ∈ (1, 2), aber x, z ∈ (1, 2, 3) definiert.

3. Wie in Toth (2019c) gezeigt wurde, kann man die Subzeichen der 2×3-Matrix in einer Pseudo-Proto-Darstellung wie folgt anordnen

$$\begin{tikzcd}
 & & 1.1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & 1.2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1.3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
2.1 & & 2.2 & & 2.3
\end{tikzcd}$$

Dagegen ist die echte Proto- und die ihr gleiche Deutero-Darstellung für die Kontexturen $K = 1$ bis $K = 3$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & 00 \arrow[dl] \arrow[dr] & & 01 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
000 & & 001 & & 012
\end{tikzcd}$$

Dadurch sind wir erstmals in der Geschichte der polykontexturalen Semiotik, die mit Kronthaler (1992) und Toth (2003) begonnen hatte, imstande, die 6 Subzeichen von $Z^{2,3}$ einer (bijektiven) Kenose zu unterziehen, denn aus der Äquivalenz der Pseudo-Proto-Deutero-Struktur von $Z^{2,3}$ und der Proto-Deutero-Struktur von $K =1$ bis $K = 3$ folgt

(1.1) $\leftrightarrow$ 0

(1.2) $\leftrightarrow$ 00

(1.3) $\leftrightarrow$ 01

(2.1) $\leftrightarrow$ 000

(2.2) $\leftrightarrow$ 001

(2.3) $\leftrightarrow$ 012.

4. Wie bereits Kronthaler (1986) an mehreren Stellen ausgeführt hatte, ist bei polykontexturalen Zahlen die monokontexturale Differenzierung zwischen abhängiger und unabhängiger Variable innerhalb einer Funktion der Form y = f(x) insofern relativiert, als daß x und y austauschbar werden, da sie als voneinander gegenseitig abhängig eingeführt werden. Besonders schön ist dies bei Kronthaler (1986, S. 128) dargestellt, wo Funktionen von Peanozahlen nach Tritoäquivalenzen gefasert werden.

Im folgenden zeigen wir sämtliche bis zur Deuteroebene unterscheidbaren polykontexturalen Funktionen und ihre semiotischen Entsprechungen auf.

4.1. Qualitative Funktion mit y = 0

μ_1: $0 = f(0) \rightarrow (1.1) = f(1.1)$

μ_2: $0 = f(00) \rightarrow (1.1) = f(1.2)$

μ_3: $0 = f(01) \rightarrow (1.1) = f(1.3)$

μ_4: $0 = f(000) \rightarrow (1.1) = f(2.1)$

μ_5: $0 = f(0001) \rightarrow (1.1) = f(2.2)$

μ_6: $0 = f(012) \rightarrow (1.1) = f(2.3)$

4.2. Qualitative Funktion mit y = 00

μ_7: $00 = f(0) \rightarrow (1.2) = f(1.1)$

μ_8: $00 = f(00) \rightarrow (1.2) = f(1.2)$

μ_9: $00 = f(01) \rightarrow (1.2) = f(1.3)$

μ_{10}: $00 = f(000) \rightarrow (1.2) = f(2.1)$

μ_{11}: $00 = f(0001) \rightarrow (1.2) = f(2.2)$

μ_{12}: $00 = f(012) \rightarrow (1.2) = f(2.3)$

4.3. Qualitative Funktion mit y = 01

μ_{13}: $01 = f(0) \rightarrow (1.3) = f(1.1)$

μ_{14}: $01 = f(00) \rightarrow (1.3) = f(1.2)$

μ_{15}: $01 = f(01) \rightarrow (1.3) = f(1.3)$

μ_{16}: 01 = f(000) → (1.3) = f(2.1)

μ_{17}: 01 = f(0001) → (1.3) = f(2.2)

μ_{18}: 01 = f(012) → (1.3) = f(2.3)

4.4. Qualitative Funktion mit y = 000

μ_{19}: 000 = f(0) → (2.1) = f(1.1)

μ_{20}: 000 = f(00) → (2.1) = f(1.2)

μ_{21}: 000 = f(01) → (2.1) = f(1.3)

μ_{22}: 000 = f(000) → (2.1) = f(2.1)

μ_{23}: 000 = f(0001) → (2.1) = f(2.2)

μ_{24}: 000 = f(012) → (2.1) = f(2.3)

4.5. Qualitative Funktion mit y = 001

M_{25}: 001 = f(0) → (2.2) = f(1.1)

M_{26}: 001 = f(00) → (2.2) = f(1.2)

M_{27}: 001 = f(01) → (2.2) = f(1.3)

M_{28}: 001 = f(000) → (2.2) = f(2.1)

M_{29}: 001 = f(0001) → (2.2) = f(2.2)

M_{30}: 001 = f(012) → (2.2) = f(2.3)

4.6. Qualitative Funktion mit y = 012

μ_{31}: 012 = f(0) → (2.3) = f(1.1)

μ_{32}: 012 = f(00) → (2.3) = f(1.2)

μ_{33}: 012 = f(01) → (2.3) = f(1.3)

μ_{34}: 012 = f(000) → (2.3) = f(2.1)

μ_{35}: 012 = f(0001) → (2.3) = f(2.2)

μ_{36}: 012 = f(012) → (2.3) = f(2.3)

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Klaus, Georg, Semiotik. Berlin (DDR) 1962, 4. Aufl. München 1973

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Die Hochzeit von Semiotik und Struktur. Klagenfurt 2003

Toth, Alfred, Die Logik des Jägers Gracchus. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

Toth, Alfred, Einbettungsrelationen topologischer semiotischer Relationen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019a

Toth, Alfred, Die Subzeichen der dyadisch-trichotomischen Zeichenrelation und ihre Kenose. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019b

Toth, Alfred, Kontexturen statt Trichotomien. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019c

Toth, Alfred, Grundlegung einer polykontexturalen Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019d

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

20.5.2019